Elementos geométricos de una curva espiral – circular – espiral simétrica

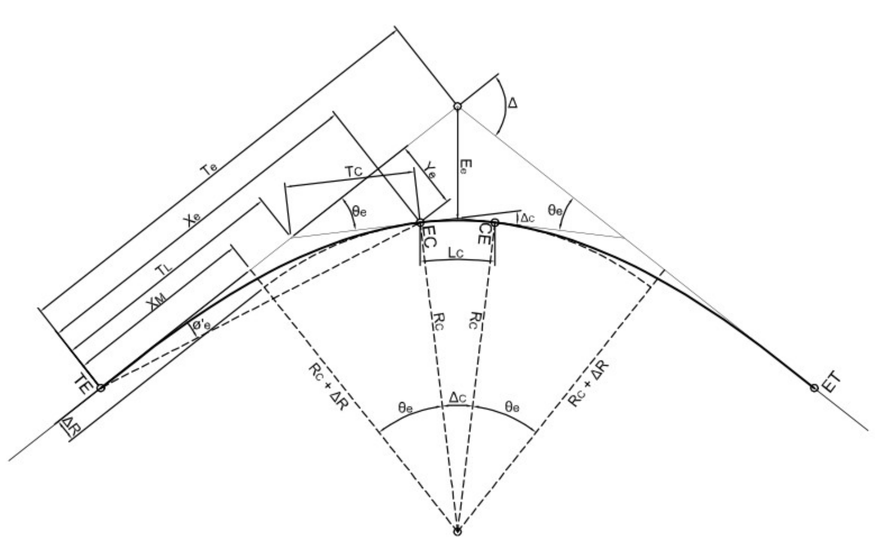

Figura 1. Esquema del empalme espiral - circular - espiral simétrica. Fuente: Manual de diseño geométrico de carreteras (INVIAS, 2008:80).

Parámetros iniciales

R_c: Radio de la curva circular desplazada

L_e: Longitud de la espiral de transición

Δ: Angulo de deflexión original de la curva circular

---

1. Parámetro de la espiral

$$A = \sqrt{R_c \cdot L_e}$$

2. Ángulo de deflexión de la espiral

$$\theta_e = \frac{L_e}{2\mathrm{R}_c} \quad en\ radianes$$

$$\theta_e = \left(\frac{90}{\pi}\right)\left(\frac{L_e}{R_c}\right) \quad en\ grados\ sexagesimales$$

3. Ángulo central de la curva circular desplazada

$$\Delta_c = \Delta - 2\theta_e$$

4. Coordenadas cartesianas del EC respecto a los ejes *x* (tangente de entrada o salida hacia el PI) e *y* (perpendicular a la tangente en el TE o ET hacia el interior de la curva)

$$X_e = L_e\left(1 - \frac{\theta_e^2}{10} + \frac{\theta_e^4}{216} - \frac{\theta_e^6}{9360} + \frac{\theta_e^8}{685440} - \cdots\right) \quad [\theta_e\ en\ radianes]$$

$$Y_e = L_e\left(\frac{\theta_e}{3} - \frac{\theta_e^3}{42} + \frac{\theta_e^5}{1320} - \frac{\theta_e^7}{75600} + \cdots\right) \quad [\theta_e\ en\ radianes]$$

5. Disloque o desplazamiento de la curva circular

$$\Delta R = Y_e - R_c(\text{١} - \cos(\theta_e))$$

El disloque de la curva debe ser de por lo menos 25 cm . Esto es

$$\Delta R \geqslant 0{,}25\ m$$

6. Coordenadas cartesianas del centro de la curva circular desplazada respecto a los ejes *x* (tangente de entrada o salida hacia el PI) e *y* (perpendicular a la tangente en el TE o ET hacia el interior de la curva)

$$X_M = X_e - R_c \sin(\theta_e)$$

$$Y_M = R + \Delta R$$

7. Tangente de la curva espiral – circular – espiral

$$T_e = X_M + (R_c + \Delta R)\tan\left(\frac{\Delta}{2}\right)$$

8. Externa de la curva espiral – circular – espiral

$$E_e = \left(\frac{R_c + \Delta R}{\cos(\Delta/\text{٢})}\right) - R_c$$

9. Tangente larga y tangente corta de la espiral

$$T_L = X_e - \frac{Y_e}{\tan(\theta_e)}$$

$$T_C = \frac{Y_e}{\sin(\theta_e)}$$

10. Cuerda larga de la espiral

$$CL_e = \sqrt{X_e^2 + Y_e^2}$$

11. Deflexión para el EC (deflexión de la cuerda larga de la espiral)

$$\phi_e' = \arctan\left(\frac{Y_e}{X_e}\right)$$

12. Longitud del tramo circular de la curva espiral – circular – espiral

$$L_c = \frac{c \cdot \Delta_c}{G_c}$$

$$c: \textit{Cuerda unidad}$$

$$G_c: \textit{Grado de curvatura de la curva circular}$$

$$G_c = 2\arcsin\left(\frac{c}{2R_c}\right)$$

La longitud mínima aceptable para el sector circular es aquella que pueda recorrer un vehículo en 2 s a la velocidad específica de la curva horizontal (V_{CH}). Esto es $L_c \geqslant \text{٠,٥٥٦}\, V_{CH}\ [V_{CH}\ en\ km/h]$.

Criterios para definir la longitud de la espiral

Parámetros

V_{CH}:	Velocidad específica de la curva horizontal [km/h]
R_c:	Radio de la curva circular desplazada [m]
e:	Peralte requerido por la curva horizontal [%]
J:	Variación de la aceleración centrípeta (*jerk* o sacudida) [m/s³]
Δs_{max}:	Inclinación máxima de la rampa de peraltes [%]
a:	Ancho de carril [m]

V_{CH}	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
J	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,6	0,6	0,5	0,5	0,4	0,4
Δs_{max}	1,28	0,96	0,77	0,6	0,55	0,5	0,47	0,44	0,41	0,38	0,38

Tabla 1. Valores de los parámetros J (en m/s³) y Δs_{max} (en %) en función de la V_{CH} (en km/h). Fuente: Manual de diseño geométrico de carreteras (INVIAS, 2008).

La longitud mínima de la espiral se define a partir del valor mínimo que debe conservar el parámetro de la clotoide en función de los siguientes criterios:

1. Variación de la aceleración centrípeta

$$A \geqslant \sqrt{\frac{V_{CH} \cdot R_c}{46{,}656\, J}\left(\frac{V_{CH}^2}{R_c} - 127\, e\right)}\ \ [e\ en\ decimales]$$

2. Transición del peralte

$$A \geqslant \sqrt{R_c\left(\frac{e \cdot a}{\Delta s_{max}}\right)}$$

3. Percepción y estética
   1. Disloque mínimo ($\Delta R \geqslant \text{٠,٢٥}\, m$)

      $$A \geqslant \sqrt[4]{6R_c^3}$$

   2. Deflexión mínima ($\theta_e \geqslant 3°$)

      $$A \geqslant 0{,}3236\, R_c$$

Deflexiones para una curva espiral – circular – espiral

Una curva espiral – circular – espiral está definida por los puntos principales TE, EC, CE y ET como se observa en la figura 1. Las abscisas de estos puntos se calculan de la siguiente manera:

$$TE = PI - T_e$$
$$EC = TE + L_e$$
$$CE = EC + L_c$$
$$ET = CE + L_e$$

Las curvas espirales se abscisan con incrementos de longitud iguales a la longitud de la cuerda unidad de la curva circular desplazada. A cualquier punto p dentro de la espiral le corresponde una longitud l que se convierte en el parámetro para definir las deflexiones y las distancias con las que se materializa la curva en el terreno.

Entonces, para cualquier punto p de la **espiral de entrada** se tiene:

$$l = Abscisa_p - Abscisa_{TE}$$

Mientras que para la **espiral de salida** será:

$$l = abscisa_{ET} - Abscisa_p$$

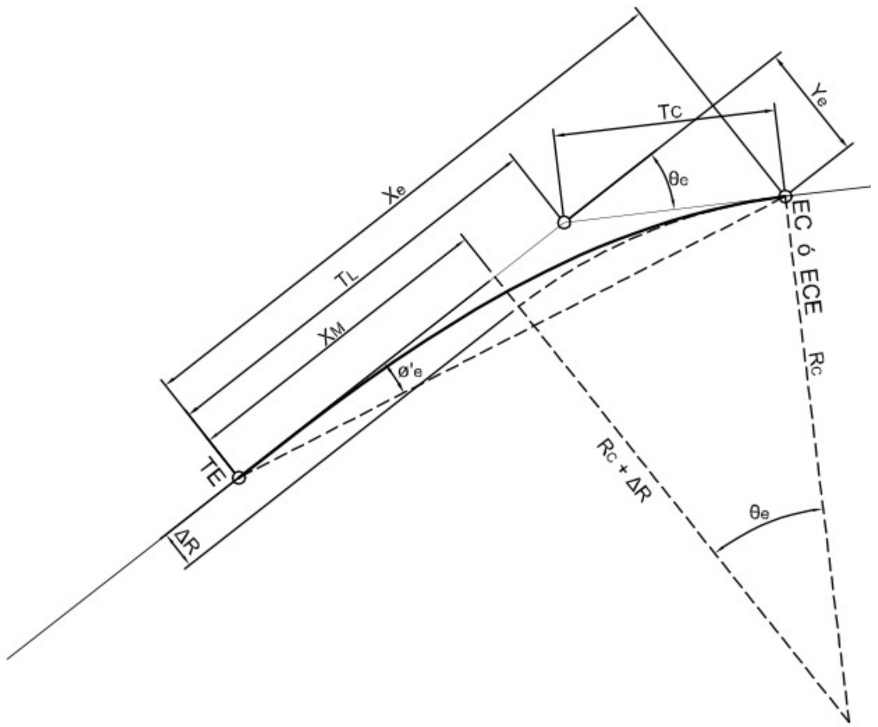

Figura 2. Elementos geométricos de la Espiral de Euler o clotoide. Fuente: Manual de diseño geométrico de carreteras (INVIAS, 2008:76).

De esta manera se definen los siguientes elementos para las deflexiones de la curva:

1. Deflexión para el punto p

$$\theta = \left(\frac{l}{L_e}\right)^2 \cdot \theta_e$$

2. Coordenadas cartesianas del punto p

$$X = l\left(1 - \frac{\theta^2}{10} + \frac{\theta^4}{216} - \frac{\theta^6}{9360} + \frac{\theta^8}{685440} - \cdots\right) \quad [\theta \ en \ radianes]$$

$$Y = l\left(\frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{42} + \frac{\theta^5}{1320} - \frac{\theta^7}{75600} + \cdots\right) \quad [\theta \ en \ radianes]$$

3. Cuerda para el punto p (desde el TE o el ET)

$$c' = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

4. Deflexión para el punto p (desde el TE o el ET)

$$\phi' = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

En el terreno se miden la cuerda c' y el ángulo ϕ' deflectado desde el TE para la espiral de entrada, y desde el ET para la espiral de salida, siguiendo un procedimiento similar al que se realiza durante la materialización de una curva circular.

La curva circular desplazada (el tramo entre EC y CE) se diseña y localiza de la misma manera que una curva circular simple, cuyos elementos corresponden a $\Delta = \Delta_c$ y $R = R_c$.
